

Вывод уравнения прямой

Уравнением линии в прямоугольной системе координат на плоскости называется уравнение с двумя переменными x и y , которому удовлетворяют координаты любой точки линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой линии.

Выведем уравнение прямой l в заданной прямоугольной системе координат.

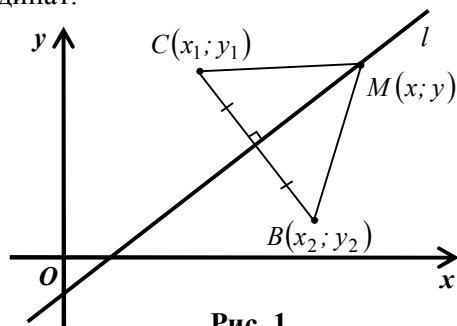


Рис. 1

Отметим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 1).

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка, поэтому если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l , то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$, то есть координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \quad (1)$$

Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l , то $AM^2 \neq BM^2$, и координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, уравнение (1) является уравнением прямой l в записанной системе координат. Преобразуем его, возведем выражения в скобках в квадрат и приведем подобные члены:

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2; \\ x^2 - 2x x_1 + x_1^2 + y^2 - 2y y_1 + y_1^2 &= x^2 - 2x x_2 + x_2^2 + y^2 - 2y y_2 + y_2^2; \\ 2x x_2 - 2x x_1 + x_1^2 - x_2^2 + y^2 + 2y y_2 - 2y y_1 + y_1^2 - y_2^2 &= 0; \\ 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$, $c = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$, тогда уравнение примет вид

$$ax^2 + by + c = 0. \quad (2)$$

Так как $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – различные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_2 - x_1)$ и $(y_2 - y_1)$ не равна нулю, то есть хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля.

Таким образом, уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.

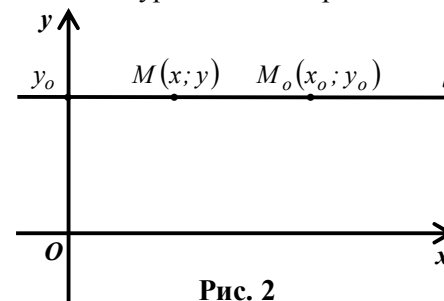


Рис. 2

$y = y_0$ – уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной оси абсцисс (Ox).

Координаты любой точки $M(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $y = y_0$, а координаты любой точки, не лежащей на прямой l , этому уравнению не удовлетворяют.

$y = 0$ – уравнение оси абсцисс (Ox).

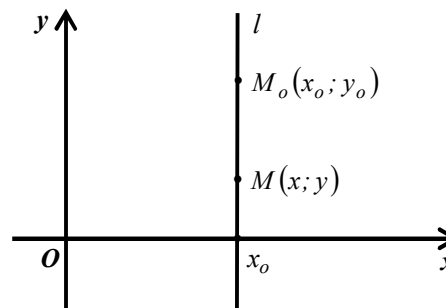


Рис. 3

$x = x_0$ – уравнение прямой l , проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной оси ординат (Oy).

Координаты любой точки $M(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $x = x_0$, а координаты любой точки, не лежащей на прямой l , этому уравнению не удовлетворяют.

$x = 0$ – уравнение оси ординат (Oy).